LA RECTA EN EL ESPACIO R^3

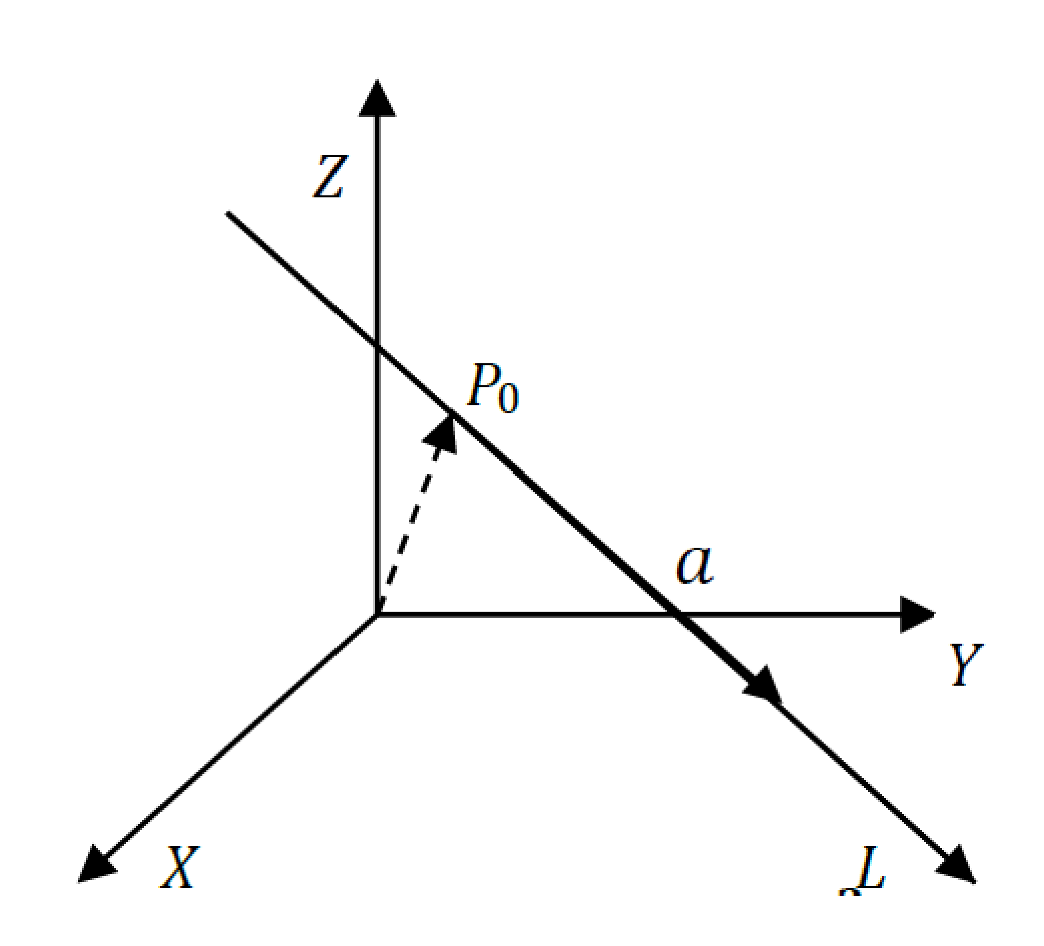
DEFINICIÓN. La recta L es el conjunto de puntos de R^3 definido por:

$$L = \{P \in R^3 / P = P_0 + t\bar{a}\ ; t \in R\}$$

Dónde

P_0 ; es un punto de paso de la recta L

$\bar{a}$; es un vector direccional de la recta L



DIVERSAS ECUACIONES DE LA RECTA

De la definición de la recta L se tiene

$$P \in L \iff P = P_0 + t\bar{a}, \qquad t \in R$$

$$\mathbf{L = \{ P / P = P_0 + t\,a,\ t \in \mathcal{R} \}}$$

Es llamada **ecuación vectorial de la recta *L*.**

Sean $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ entonces la recta L resulta

$$L: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3), t \in R$$

De donde

$$L: \begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + ta_1} \\ \boldsymbol{y = y_0 + ta_2} \\ \boldsymbol{z = z_0 + ta_3} \end{cases}, \qquad \boldsymbol{t \in R}$$

Expresión llamada **ecuación paramétrica de la recta L**.

Despejando el parámetro t e igualando se obtiene

$$\boldsymbol{L}: \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\boldsymbol{a}_1}=\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{a}_2}=\frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0}{\boldsymbol{a}_3}$$

Expresión llamada **ecuación simétrica de la recta L**.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Sean $L_1 : P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in R$ y $L_2 : P = Q_0 + s\bar{b}\,,\ s \in R$ dos rectas en R^3

Se presentan las siguientes posiciones relativas:

RECTAS PARALELAS

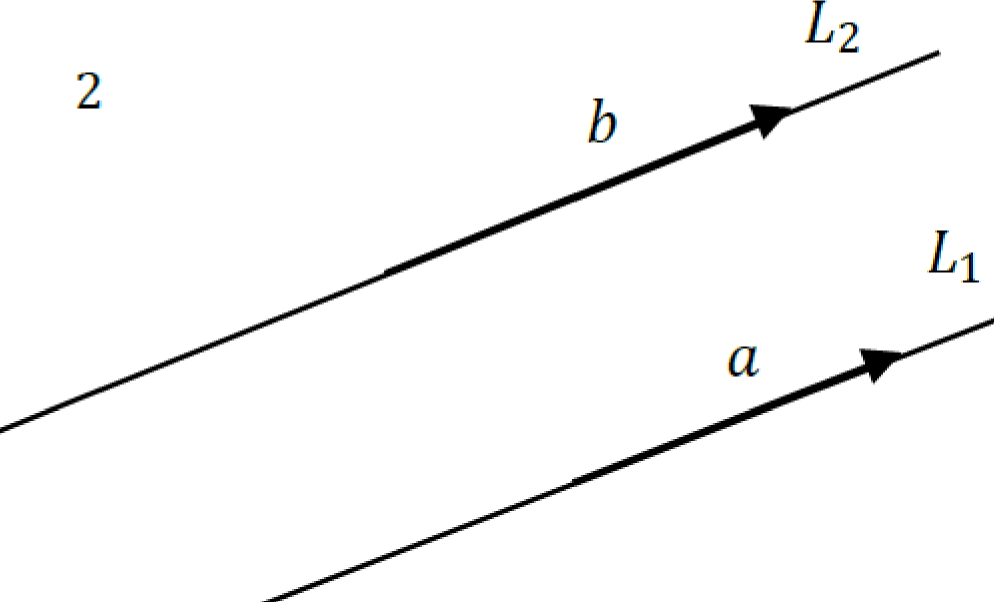
Las rectas L_1 y L_2 son paralelas

2

(L_1 // y L_2) si y sólo si los vectores

direccionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son paralelos.

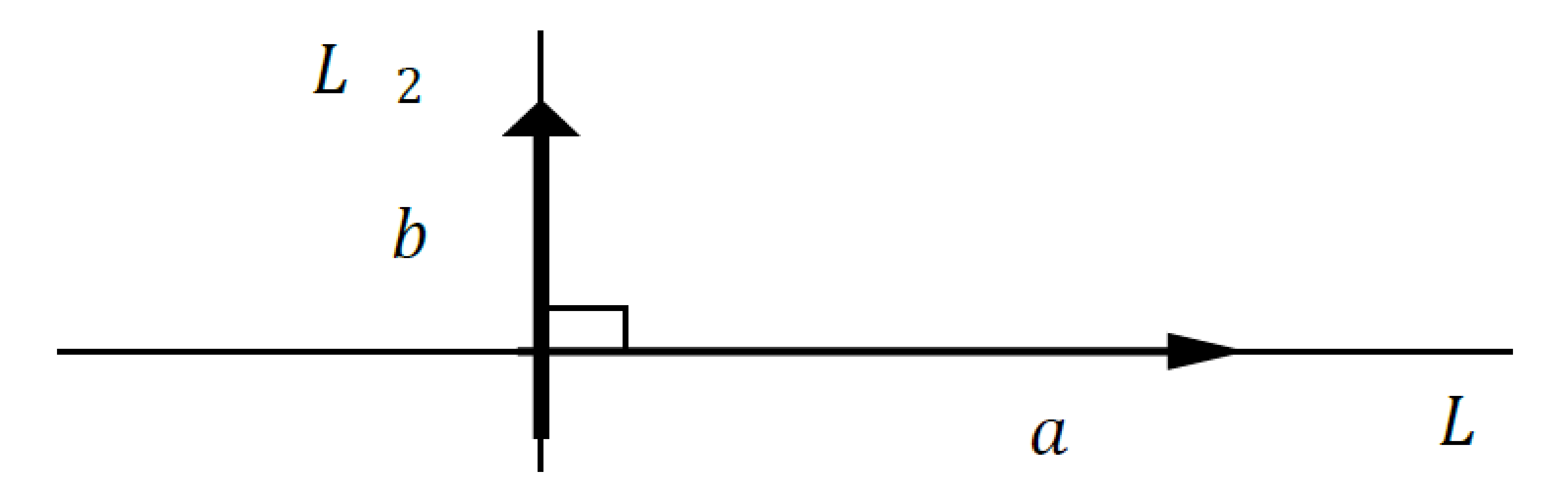
$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \bar{a} // \bar{b}$$



Las rectas L_1 y L_2 son paralelas

RECTAS ORTOGONALES

Las rectas L_1 y L_2 son ortogonales($L_1 \perp L_2$) si y sólo si los vectores direccionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales.

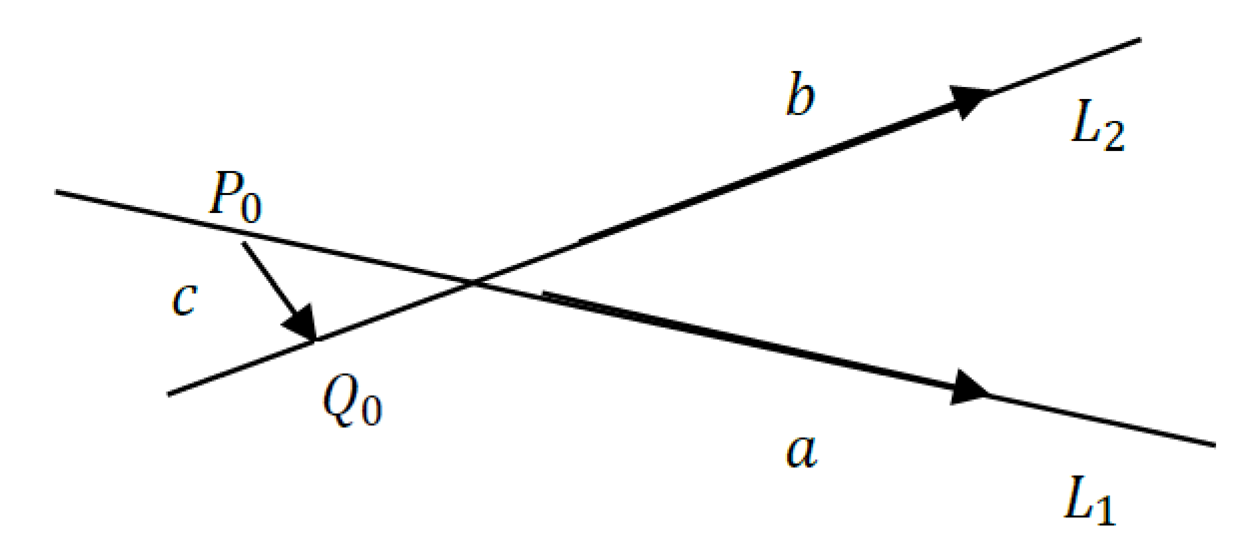


$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$$

Las rectas L_1 y L_2 son ortogonales

RECTAS QUE SE INTERSECTAN

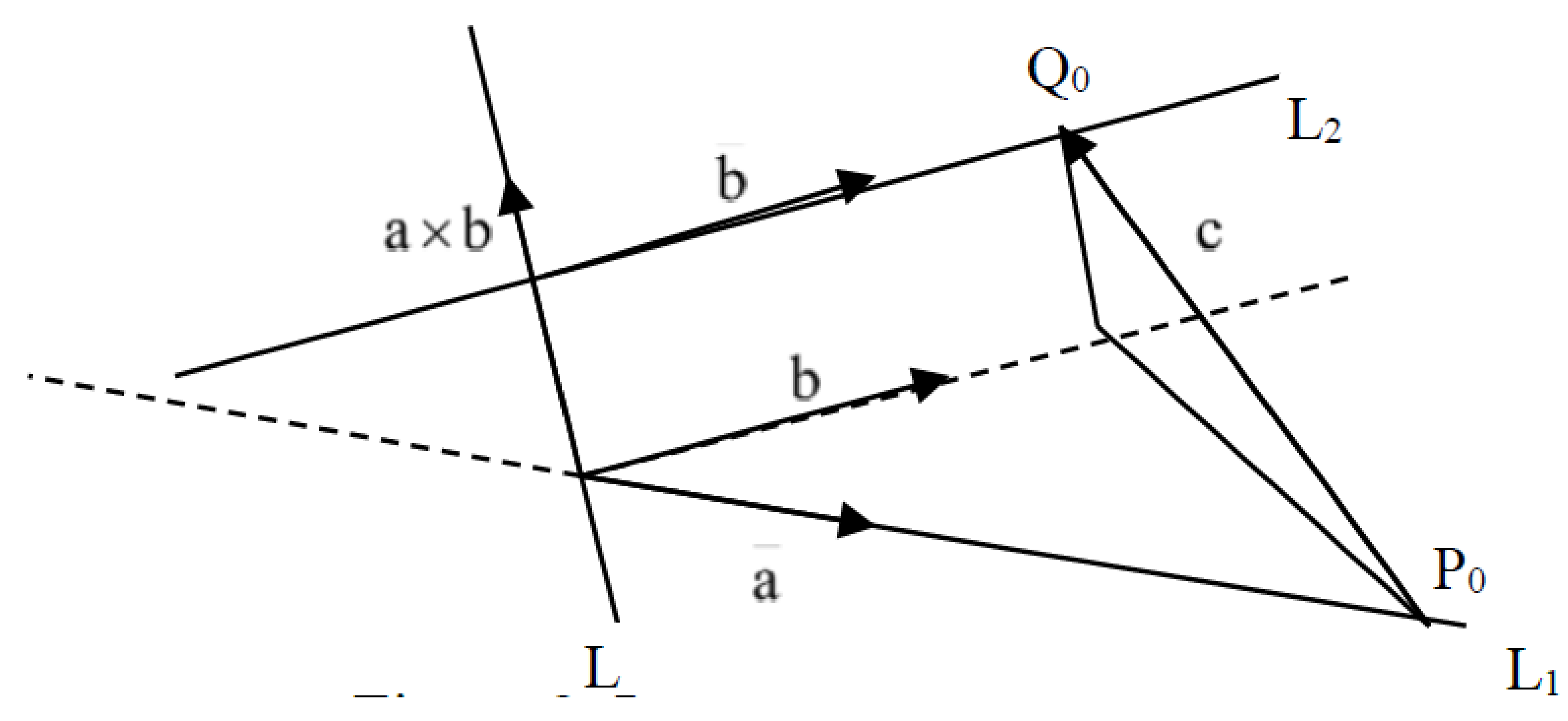
Las rectas L_1 y L_2 se interceptan si y sólo si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$ donde $\bar{c} = \overline{P_0Q_0}$



Las rectas L_1 y L_2 se intersectan

RECTAS QUE SE CRUZAN

Las rectas L_1 y L_2 se cruzan si y sólo si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \neq 0$ donde $\bar{c} = \overline{P_0 Q_0}$



Las rectas L_1 y L_2 se cruzan

ANGULO ENTRE RECTAS

Sean

$L_1: P = P_0 + t\bar{a}\ , t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + s\bar{b}\ , s \in R$ dos rectas de R^3.

Se define el ángulo entre las rectas , como el ángulo que forman sus vectores direccionales.

Es decir,

$$\measuredangle(L_1, L_2) = \measuredangle(\bar{a}, \bar{b}) = \theta \text{ Y}$$

queda completamente determinado por:

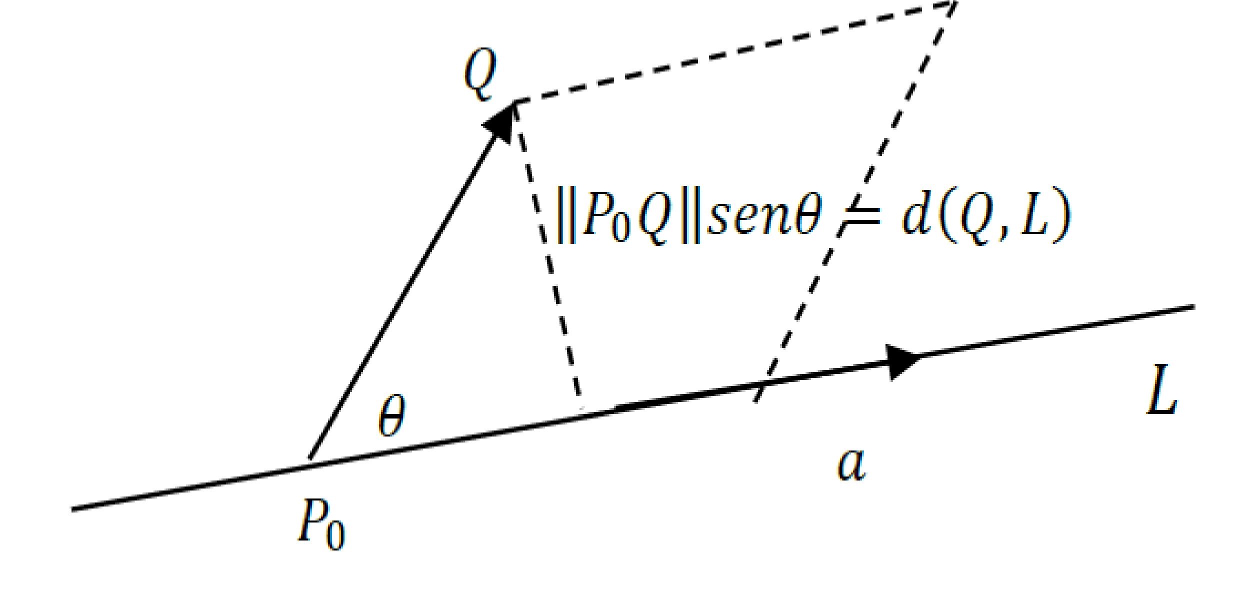
$$cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{||\bar{a}||\,||\bar{b}||} \qquad ,\text{con } \theta \epsilon\ [0, \pi\ ]$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea L: $P = P_0 + t\bar{a}$, $t \in R$ una recta y Q un punto en R^3, para determinar la distancia del punto Q a la recta L, vamos a calcularlo como sigue:

En la figura, el área del paralelogramo está dado por

$$A = \|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\| = \|\bar{a}\|\|\overline{P_0Q}\|sen\theta$$



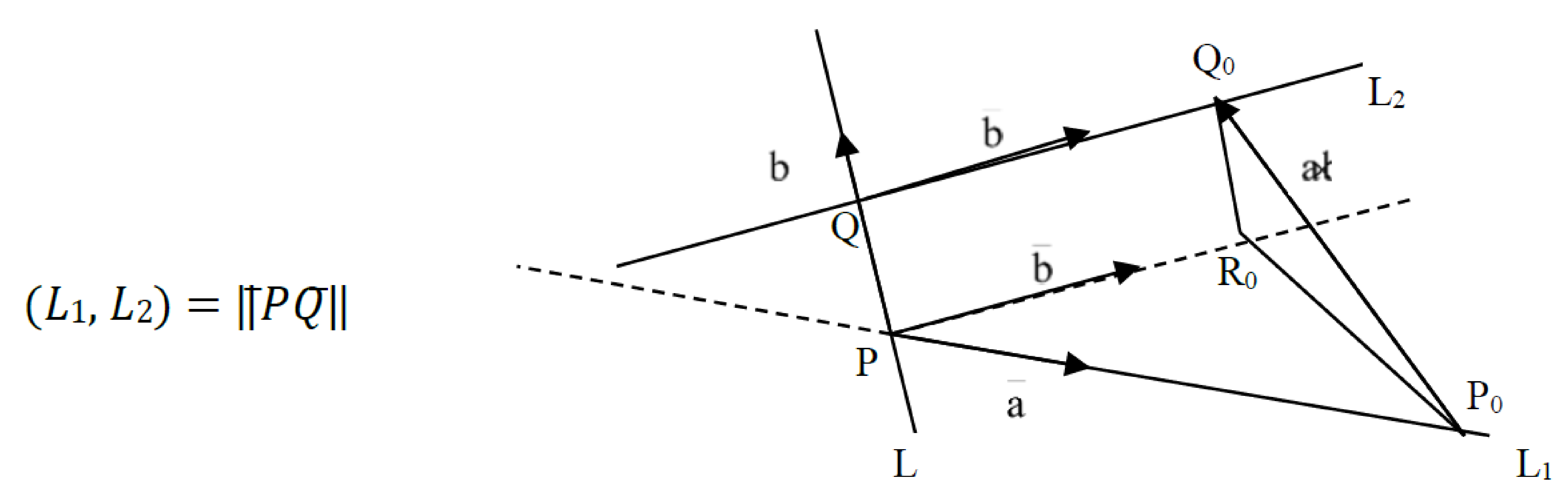
De donde: $|\overline{P_0Q} \times a| = |a|\ |\overline{P_0Q}|\text{sen}\theta$

Finalmente;

$$\boldsymbol{d(Q,L) = \frac{\|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|}}$$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Sean $L_1: P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + s\bar{b}\,, s \in R$ dos rectas que se cruzan.



$(L_1, L_2) = \|\overline{PQ}\|$

Distancia entre las rectas que se cruzan L_1 y L_2

La distancia entre las rectas que se cruzan L_1 y L_2 es aquella medida a lo largo de la recta L ortogonal a ellas

Es decir,

$$\|\overline{PQ}\| = \|\overline{R_0Q_0}\| = |Comp_{\bar{a}\times\bar{b}}\overline{P_0Q_0}| = \left|\frac{\overline{P_0Q_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}\right| = \frac{|[\overline{P_0Q_0}\ \bar{a}\ \bar{b}]|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}$$

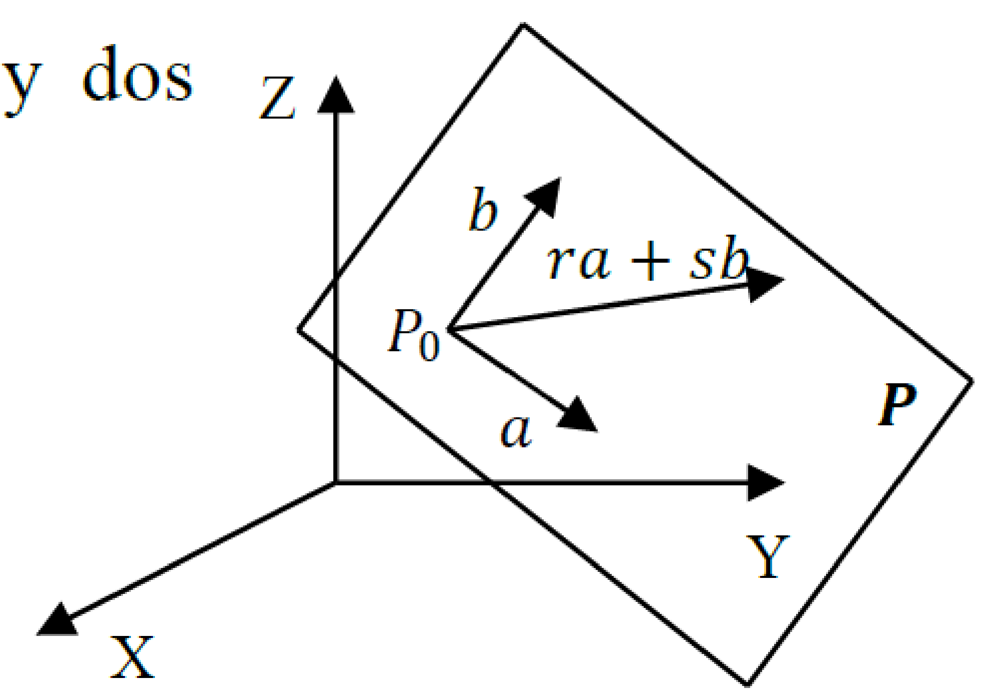
Finalmente,

$$\boldsymbol{d(L_1, L_2)} = \frac{|[\overline{\boldsymbol{P_0Q_0}}\ \bar{\boldsymbol{a}}\ \bar{\boldsymbol{b}}]|}{\|\bar{\boldsymbol{a}}\times\bar{\boldsymbol{b}}\|}$$

EL PLANO EN EL ESPACIO R^3

DEFINICIÓN. El Plano es un conjunto de puntos P en R^3 que tiene un punto de paso P_0 y dos vectores $\bar{a}$, b no paralelos en R^3 tal que

$$\boldsymbol{P} = \{P \in R^3 / P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b};\, r, s \in R\}$$



DIVERSAS ECUACIONES DEL PLANO

De la definición del plano $\boldsymbol{P}$

$$P \in \boldsymbol{P} \Leftrightarrow P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b};\ r, s \in R$$

Luego, la expresión

$$\boldsymbol{P}: P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b};\ r, s \in R$$

Es llamada la **ecuación vectorial del plano P** que pasa por el punto P_0 y es generado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

Sean (x, y, z), $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces la ecuación del plano resulta

$$P: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (a_1, a_2, a_3) + s(b_1, b_2, b_3);\ r, s \in R$$

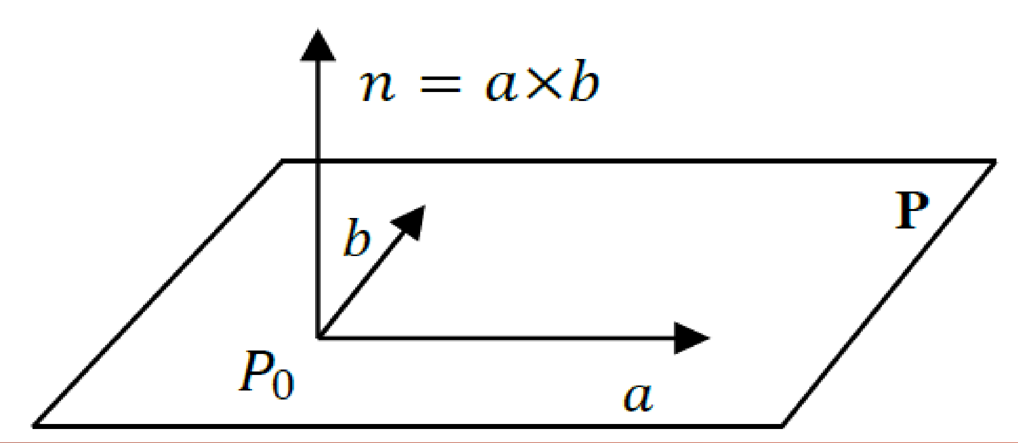
De donde

$$P:\begin{cases} x = x_0 + ra_1 + sb_1 \\ y = y_0 + ra_2 + sb_2 \;;r,s \in R \\ z = z_0 + ra_3 + sb_3 \end{cases}$$

Expresión llamada **ecuación paramétrica del plano** P.

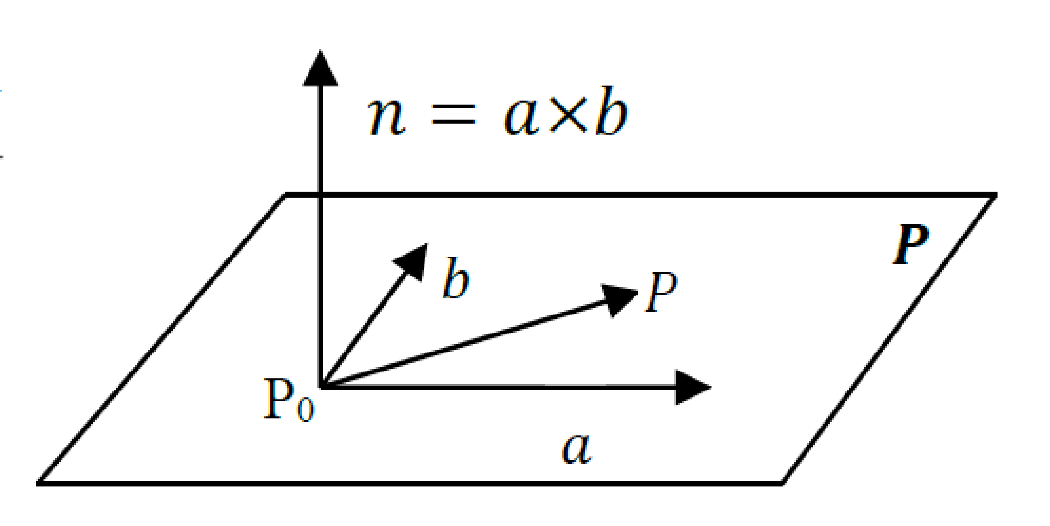
VECTOR NORMAL AL PLANO

Cualquier vector no nulo $\bar{n}$ ortogonal al plano P, es ortogonal a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, se llama **vector normal** al plano P.



En particular un vector normal al plano P es $\bar{\boldsymbol{n}} = \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}$

Si P_0 es un punto fijo del plano $\boldsymbol{P}$ y P es un punto cualquiera de $\boldsymbol{P}$, entonces el vector $\overline{P_0P}$ es ortogonal al vector normal $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$



Luego la ecuación del plano está dada por

$$P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$$ Ecuación normal del Plano P

Expresión llamada **ecuación normal del plano P** con punto de paso P_0 y vector normal n

Ahora si (x, y, z), $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\bar{n} = (a, b, c)$ se tiene que la ecuación del plano está dada por

Operando se obtiene,

$$\boldsymbol{P: ax + by + cz + d = 0}$$

Donde : d= -ax0 – by0 –cz0

Expresión llamada **ecuación general del plano P** con vector normal $\bar{n} = (a, b, c)$ y punto de paso P_0.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Sean los planos P_1: $(\overline{P_0P}) \cdot \bar{n}_1 = 0$ y P_2: $(\overline{Q_0P}) \cdot \bar{n}_2 = 0$ en R^3. Se presentan las siguientes posiciones relativas:

PLANOS PARALELOS

Los planos P_1: $(\overline{P_0P}) \cdot \bar{n}_1 = 0$ y P_2: $(\overline{Q_0P}) \cdot \bar{n}_2 = 0$ son paralelos si sus vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$ son paralelos.

Es decir,

$$P_1 // P_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 // \bar{n}_2$$

observaciones

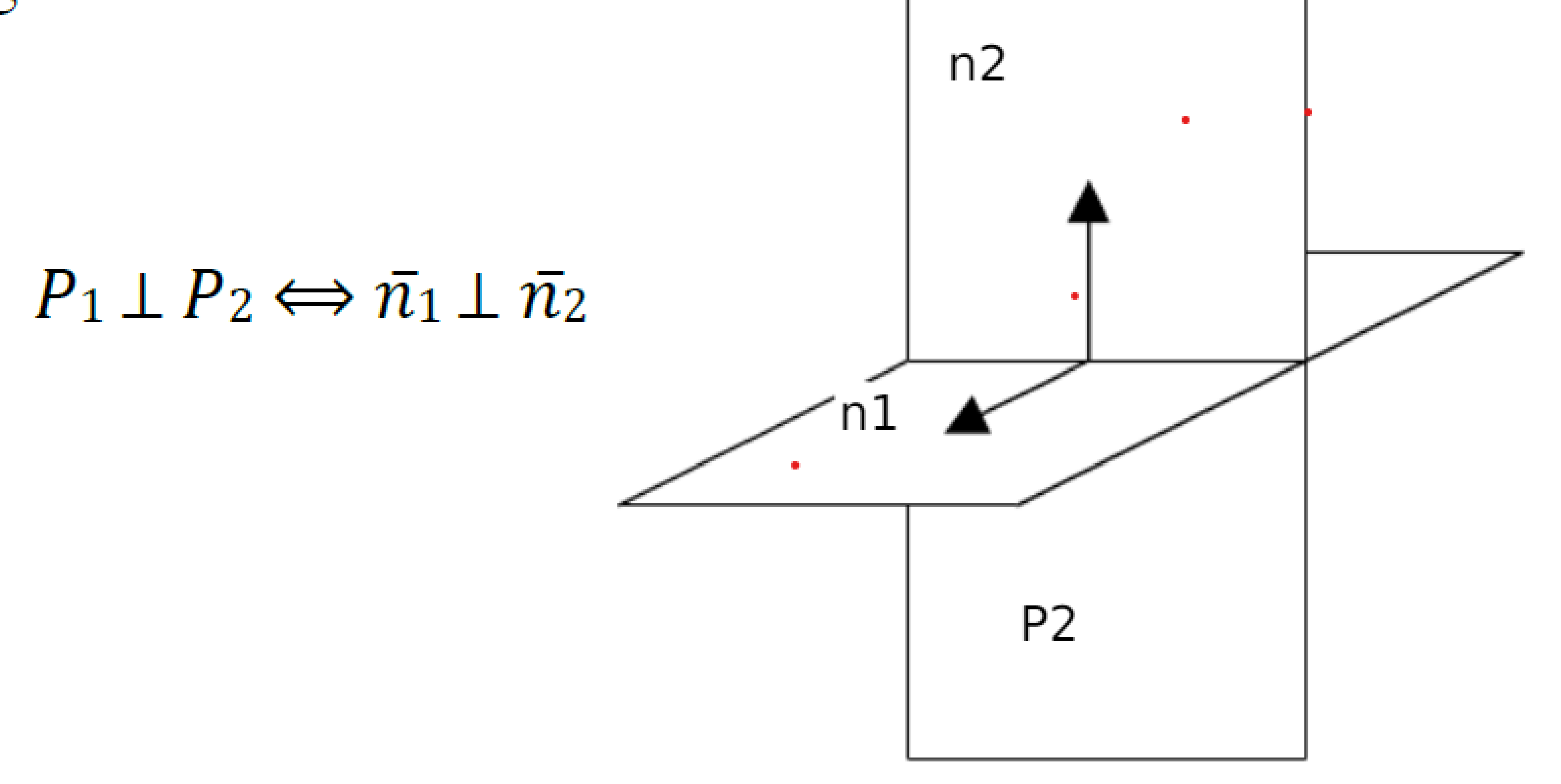
- Si P_1 y P_2 son paralelos entonces $P_1 = P_2$(coincidentes) o $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ (intersección nula)
- Si P_1 y P_2 no son paralelos entonces su intersección es una recta

PLANOS ORTOGONALES

Los planos $P_1: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n}_1 = 0$ y $P_2: (\overline{Q_0P}) \cdot \bar{n}_2 = 0$ son ortogonales si sus vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$ son ortogonales.

Es decir,

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$$



ANGULO ENTRE DOS PLANOS

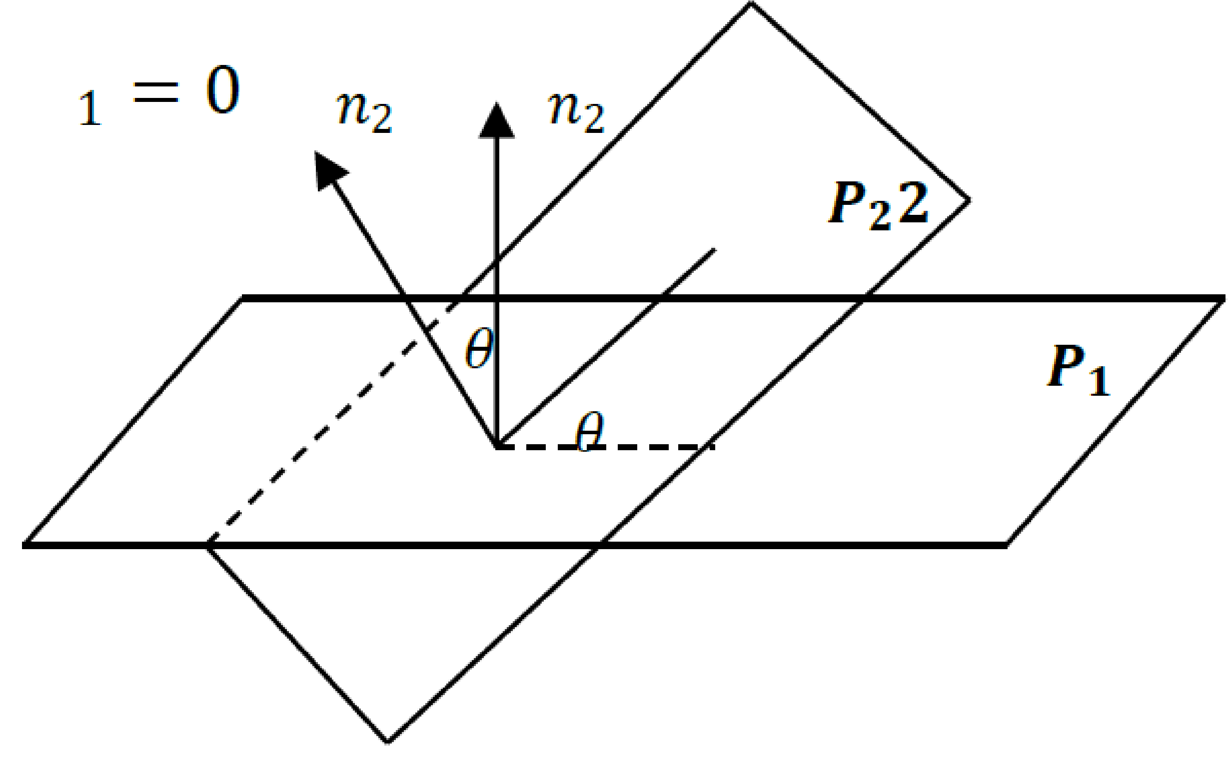
El ángulo entre los planos

$P_1 : (\overrightarrow{P_0P}).n_1=0$ y

$P_2 : (\overrightarrow{Q_0P}).n_2=0$ se define como

el ángulo formado entre sus

vectores normales n_1 y n_2.



Angulo entre dos planos

Es decir,

$$\measuredangle(P_1, P_2) = \measuredangle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) \sim cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{\|\bar{n}_1\|\|\bar{n}_2\|}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Sea el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$, $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$ y el punto Q de R^3. Para hallar la distancia de[l]

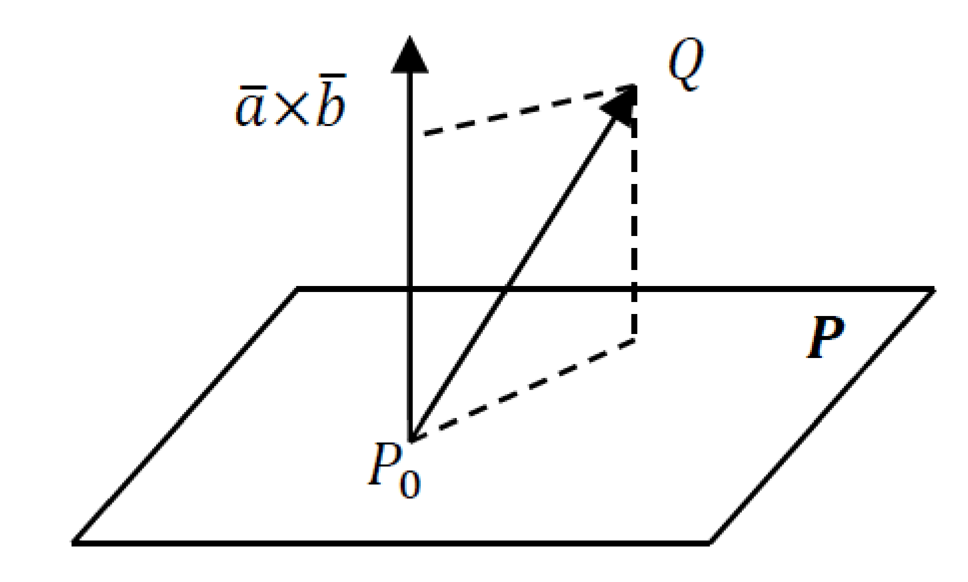
punto Q al plano P se sigue;

En la figura

$$d(Q,P) = \|Proy_{\bar{a}\times\bar{b}}\overline{P_0Q}\|$$

$$d(Q,P) = \left\|\frac{\overline{P_0Q}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2}\right\|$$

$$d(Q,P) = \frac{|\overline{P_0Q}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}$$



Distancia del punto Q al plano P

Pero teniendo en cuenta que también que :

$$d(Q,P) = \frac{|\overline{P_0Q} \cdot \bar{n}|}{\|\bar{n}\|}$$

Si $Q(x_1, y_1, z_1)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{n} = (a, b, c)$ y $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, entonces

$$d(Q,P) = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boldsymbol{d(Q,P) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Sea la recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ y el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ en R^3. Se presenta las siguientes posiciones relativas:

RECTA PARALELA A UN PLANO

La recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ es paralela al plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ si y sólo su vector direccional $\bar{a}$ y su vector normal $\bar{n}$, respectivamente, son ortogonales.
Es decir;

$$L \parallel P \Leftrightarrow \bar{n} \perp \bar{a} \Leftrightarrow \bar{n} \cdot \bar{a} = 0$$

y puede suceder que $L \cap P = L$ ó $L \cap P = \phi$

RECTA ORTOGONAL A UN PLANO

La recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ es ortogonal al plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ si y sólo su vector direccional $\bar{a}$ y su vector normal $\bar{n}$, respectivamente, son paralelos.

Es decir:

$$L \perp P \Leftrightarrow \bar{n} \parallel \bar{a}$$

En general, la recta L que no es paralela al plano P se interceptan en un punto.

INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UN PLANO NO PARALELOS

Sea la recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ y el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ no paralelos.

Se desea hallar el punto de intersección $L \cap P = R$

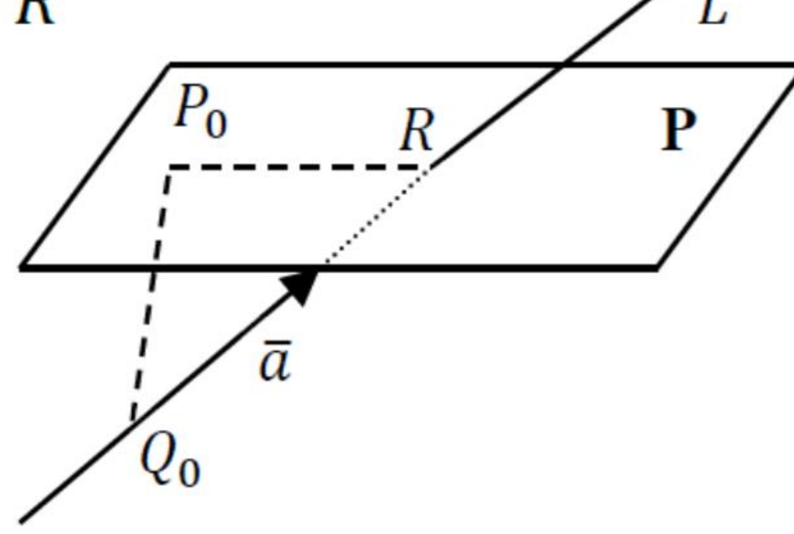
Para ello se sigue;

En la figura

$$\overline{Q_0P_0} + \overline{P_0R} = \overline{Q_0R}$$

y

$$\overline{Q_0R} = t\bar{a}\,, t \in R$$



Intersección de la recta L y el plano P

INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UN PLANO NO PARALELOS

Sea la recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ y el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ no paralelos.

Se desea hallar el punto de intersección $L \cap P = R$

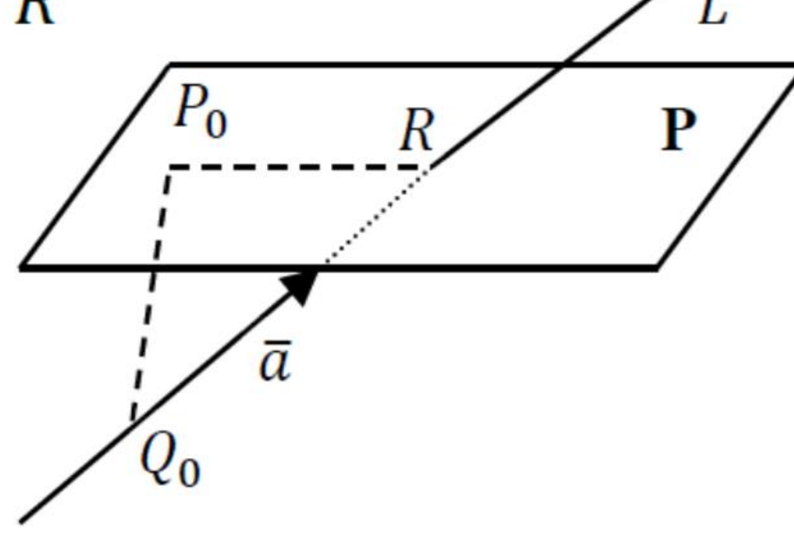
Para ello se sigue;

En la figura

$$\overline{Q_0P_0} + \overline{P_0R} = \overline{Q_0R}$$

y

$$\overline{Q_0R} = t\bar{a}, t \in R$$



Intersección de la recta L y el plano P

Multiplicando escalarmente la igualdad por el vector n, resulta

$$\overline{Q_0P_0}\cdot\bar{n}+\overline{P_0R}\cdot\bar{n}=\overline{Q_0R}\cdot\bar{n}$$

Pero $\bar{n}\perp\overline{P_0R}$, es decir $\bar{n}\cdot\overline{P_0R}=0$

Entonces

$$\overline{Q_0P_0}\cdot\bar{n}=\overline{Q_0R}\cdot\bar{n}\leadsto\ \overline{Q_0P_0}\cdot\bar{n}=t\bar{a}\cdot\bar{n}\leadsto\ t=\frac{\overline{Q_0P_0}\cdot\bar{n}}{\bar{a}\cdot\bar{n}}$$

Luego la ecuación anterior resulta

$$\overline{Q_0R}=\left(\frac{\overline{Q_0P_0}\cdot\bar{n}}{\bar{a}\cdot\bar{n}}\right)\bar{a}$$

Finalmente

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q_o}+\left[\frac{(\boldsymbol{P_0}-\boldsymbol{Q_0})\cdot\bar{\boldsymbol{n}}}{\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{n}}}\right]\bar{\boldsymbol{a}}$$

Es el punto de intersección de la recta L y el plano P.

DISTANCIA ENTRE PLANOS PARALELOS

Sean los planos paralelos dados en su forma general por:

$$\wp_1 : Ax + By + Cz = D_1$$

$$\wp_2 : Ax + By + Cz = D_2$$

Para hallar la distancia entre estos planos se sigue;

Sean $P_1(x_1, y_1, z_1) \in \wp_1$ y $P_2(x_2, y_2, z_2) \in \wp_2$

Distancia entre dos planos paralelos

$$d(\wp_1, \wp_2) = |Comp_{\bar{n}}\overline{P_1P_2}|$$

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left|\frac{\overline{P_1P_2} \cdot \bar{n}}{\|\bar{n}\|}\right|$$

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left|\frac{(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \cdot (A; B; C)}{\|(A, B, C)\|}\right|$$

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left|\frac{Ax_2 + By_2 + Cz_2 - Ax_1 - By_1 - Cz_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

Finalmente,

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left|\frac{D_2 - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

Ejercicio . Halle la ecuación del plano P que contiene a la recta

$$L: \begin{cases} 2x - y - 4z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Y es perpendicular al planoP_1: $2x + y - 2z + 1 = 0$.

Solución

Se desea hallar la ecuación del plano P generado por el vector direccional de la recta L y por el vector normal del plano P_1, sino no son paralelos, y con punto de paso alguno punto de la recta L.

La recta L es intersección de dos planos con vectores normales

$$L: \begin{cases} 2x - y - 4z + 7 = 0 \sim \bar{n}_1 = (2,-1,-4) \\ 3x + 2y + z = 0 \sim \bar{n}_2 = (3,2,1) \end{cases}$$

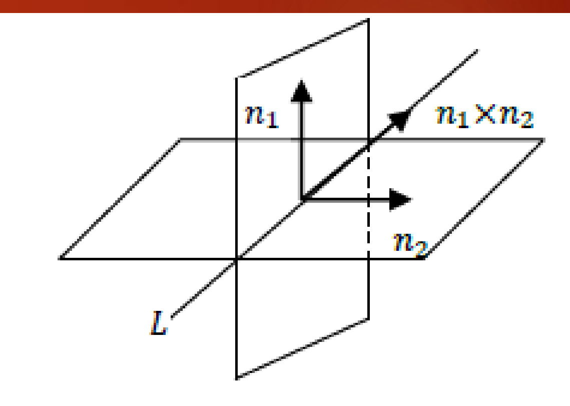
Tales que $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$, por lo que los planos son ortogonales.

En la figura, la recta L tiene como vector direccional al vector $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (7, -14, 7)$, por lo que

$$L: P = P_0 + (1, -2, 1)\ , t \in R$$

Donde $P_0(x_0, y_0, z_0) \in L$

Sea $x_0 = 0$, entonces



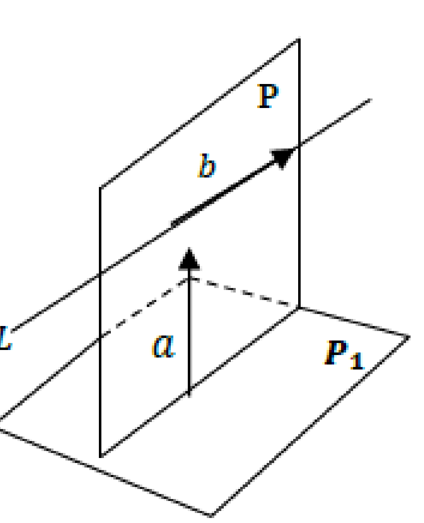
$$P_0(0, y_0, z_0) \in L: \begin{cases} y_0 - 4z_0 + 7 = 0 \\ 2y_0 + z_0 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene $y_0 = -1$, $z_0 = 2$

Luego el punto de paso es $P_0(0, -1,2)$ y la recta es;

$$L: P = (0, -1,2) + (1, -2,1)\ , t \in R$$

Ahora el plano P es generado por el vector $\bar{a} = (2,1, -2)$ normal a P_1 y el vector $\bar{b} = (1, -2,1)$ vector direccional de L. Es decir



$$P: P = (0, -1,2) + r\bar{a} + s\bar{b}; r, s \in R$$

$$P{:}P{=}(0,{-}1,2){+}r(2,1,{-}2){+}s(1,{-}2,1);r,s{\in}R$$

De

$$P: \bar{P_0 P} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 0$$

Se obtiene la ecuación general del plano P

$$P: (x, y + 1, z - 2) \cdot ((2,1,$$

$$-2)\times(1,-2,1)) = 0\ P: (x, y + 1, z - 2) \cdot$$

$$(-3,-4,-3) = 0$$

$$\boldsymbol{P: 3x + 4y + 3z - 2 = 0}$$

INTERSECCIÓN DE m PLANOS

Si tenemos m planos, tales como :

P1: $a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$

P2: $a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$

.

.

.

Pm : $a_m x + b_m y + c_m z = d_m$

i)Si el r(Aa)= r(A)= 3 ,la intersección entre los m planos es un punto.

ii)Si el r(Aa)= r(A)= 2 ,la intersección entre los m planos es una recta.

iii)Si el r(Aa)= r(A)= 1 ,la intersección entre los m planos es un plano.

iv)Si el r(Aa)≠ r(A)no existe intersección entre los m planos.